TEMA 4: DERIVACIÓN. REGLA DE L'HÔPITAL

4.1 DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:

Definición: Se dice que una función f definida en un entorno de a, $f:(a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$, es derivable en a, si su cociente incremental tiene límite "finito" cuando $x \to a$ y en ese caso su derivada $f'(a)$ en el punto a se define:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En muchas ocasiones se usa para definir $f'(a)$ la variable $h = x - a$ en lugar de la propia variable x y entonces:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo-1 (51): Comprobar que la función lineal f(x) = mx + n con m; n ϵ R tiene por derivada f'(x) = m.

Notación de Leibniz: Una función $y = f(x)$ es una relación de dependencia entre dos variables, la variable independiente x y la variable dependiente y. La derivada de la función se expresa entonces como un cociente de diferenciales: $f'(a) = \frac{dy}{dx}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:

Si f es una función continua en I: $(a-\delta, a+\delta)$ y derivable en $a \in I$, admite tangente en el punto $(a, f(a))$ y que la pendiente de la tangente es el valor $f'(a)$. Por lo tanto:

$$Ecuación\ de\ la\ recta\ tangente: y(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$Ecuación\ de\ la\ recta\ normal: y(x) = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

Obviamente, la recta tangente es la recta que mejor aproxima el valor de la función f en las proximidades de x = a.

Ejemplo-2 (54): Calcular los valores de la función f(x)=$\sqrt[3]{x}$ en los puntos $x = 990, 1021$. Solución:9,966; 10,07.

DERIVADAS LATERALES:

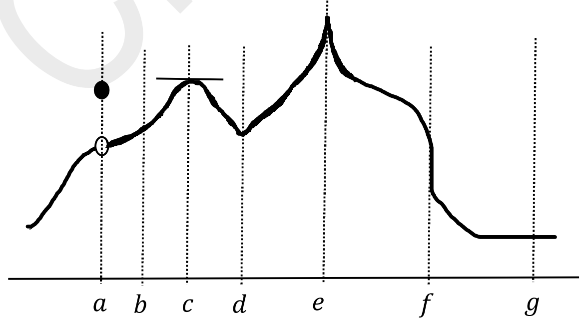
Derivada lateral derecha de f en a es : $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(si\ este\ límite\ existe\ y\ es\ finito)$

Derivada lateral izquierda de f en a es: $f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(si\ este\ límite\ existe\ y\ es\ finito)$

Proposición: Para que exista $f'(a)$ deben existir ambos límites, ser finitos y coincidir. (Se dirá que f es derivable en a)

Nota: Esto no es la definición de $f'(a^+)$ y $f'(a^-)$ que se verá más adelante.

Ejemplo-3 (55): Probar que la función f(x)=$\begin{cases} x^2 & si\ x \le 0 \\ x & si\ x > 0 \end{cases}$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$



	a	b	c	d	e	f	g
Continuidad	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI
$f'_+(p)$		+	0	-	∄ $(No\ \infty)$	∄ $(No - \infty)$	0
$f'_-(p)$		+	0	+	∄ $(No - \infty)$	∄ $(No - \infty)$	0
$f'(p)$		+	0	∄	∄	∄	0

4.2 CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD:

Proposición. Si f es **derivable** en $x = a \xrightarrow{entonces} f$ es **continua** en $x = a$.

Además, si f no es continua en $x = a$, entonces, f no podrá ser derivable en $x = a$

Nota: La existencia de derivadas laterales de una función en un punto garantiza la continuidad en dicho punto, aún en el caso de que las derivadas laterales no coincidan y por tanto la función no sea derivable. En cambio, si las derivadas laterales en un punto no existen entonces la función podrá

ser o no continua en el punto.

Ejemplo-4 (56): Demostrar que la función f(x) = $|x|$ *es continua en* $\mathbb{R}$ *pero no es derivable en el origen.*

Ejemplo: la función $f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ *es continua en* $\mathbb{R}$ *pero no es derivable en el origen.*

LÍMITES LATERALES DE LAS DERIVADAS:

Proposición: Sea f una función continua en a y derivable en todos los puntos del entorno salvo quizá en el propio punto a, se tiene que:

$$\boxed{\begin{cases} Si\ \lim\limits_{x\to a^+} f'(x)\ existe \xRightarrow{se\ cumple\ que} \lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = f'_+(a) \\ Si\ \lim\limits_{x\to a^-} f'(x)\ existe \xRightarrow{se\ cumple\ que} \lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = f'_-(a) \end{cases}}$$

Nota: los límites laterales de f' en a se pueden nombrar también: $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = f'(a^+)$; $\lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = f'(a^-)$

Es decir, cuando los límites laterales de la derivada existen, coinciden con las derivadas laterales. A su vez, si los dos límites laterales de la derivada existen y coinciden entonces existe $f'(a)$ y coincide con ese valor. Si los dos límites laterales de la derivada existen pero no coinciden, entonces la función no es derivable en a. En el caso de que los límites laterales no existan la derivada en a puede o no existir. Es decir:

$$Si\ f\ es\ continua\ en\ x = a\ y \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = l, \xRightarrow{entonces} f'(a) = l \\ \lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = l_1 \neq \lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = l_2, \xRightarrow{entonces} f'(a) = \nexists \\ \lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = \nexists \text{ ó } \lim\limits_{x\to a^-} f'(x) = \nexists \xRightarrow{entonces} f'(a)\ puede\ o\ no\ existir \end{cases}$$

Ejemplo-5 (57): Demostrar que si existe $g'(0)$ *y vale 0, siendo* $g(x)\colon \begin{cases} x^2 sen\ \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$

4.3 DERIVADAS SUCESIVAS:

Definición de derivada segunda de una función:

Sea la función $f\colon (c_1, c_2) \to \mathbb{R}$, $a \in (c_1, c_2)$ y se supone que existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ existe $f'(x)$. Bajo estas condiciones se dice que f es dos veces derivable en a, es decir, que tiene derivada segunda en el punto a, si existe el límite siguiente:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = f''(a)}$$

Derivada de orden n: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = f^{(n)}(a)$

Función de clase n:

Se dice que una función f es de clase p ϵ ℕ con p > 0 en un intervalo (a, b) y se escribe $f \epsilon C^p((a,b))$ cuando:

$$\begin{cases} \forall x \,\epsilon\, (a,b) \text{ existen las derivadas } f^{(n)}(x) \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots, p \\ \text{La derivada } f^{(p)}(x) \text{ es una función continua en } (a, b) \end{cases}$$

Nota: $f^{(0)}(x) = f(x)$. A su vez, si una función es continua en (a, b) entonces $f \epsilon C^0((a,b))$

4.4 REGLAS DE DERIVACIÓN:

Sean f y g funciones derivables en el punto a. Entonces las funciones $f + g$; $f \cdot g$; $c \cdot f$; $1/g$ y f/g son derivables en a (siempre que g (a) ≠ 0 en los casos de 1=g y f=g) y se cumple:

$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$	$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$
$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$	$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}$
$(c \cdot f)'(a) = c \cdot f'(a)$	

A su vez: $(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)'(a) = f_1'(a) \cdot f_2(a) \cdots f_n(a) + f_1(a) \cdot f_2'(a) \cdots f_n(a) + \cdots + f_1(a) \cdot f_2(a) \cdots f_n'(a)$

Fórmula de Leibniz (derivada n-ésima del producto):

$$\boxed{(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a) \cdot g^{(k)}(a)}$$

Ejemplo-6 (61): Sean las funciones f(x)=$\frac{x^2}{2}$ *y g(x)=sen x. Calcular* $(f \cdot g)^{(31)}(0)$. *Solución: 465.*

4.5 REGLA DE LA CADENA:

Si f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$, entonces la función $(g \circ f)$ es derivable en a y se cumple:

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)}$$

Ejemplo-7: Sea h(x)=$\sqrt{x^2+1}$. *Calcular h'(x). Solución:* $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

En segundas derivadas quedaría:

$$(g \circ f)'' = [(g \circ f)']' = [g'(f) \cdot f']' = g''(f) \cdot f' \cdot f' + g'(f) \cdot f'' = g''(f) \cdot (f')^2 + g'(f) \cdot f''$$

4.6 TEOREMA DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA:

Sea f una función inyectiva y continua sobre un intervalo I. Si f es derivable en un punto $a \,\epsilon\, I$ y $f'(a) \neq 0$ entonces la función inversa f^{-1} es derivable en el punto $b = f(a)$. Además, se cumple:

$$Demost: (f^{-1} \circ f)(x) = x \xrightarrow{derivo} (f^{-1}(f(x)))' = 1 \xrightarrow{Regla\ Cadena} (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \xrightarrow{despejo} (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\boxed{FÓRMULA: (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(b)\big)} = \frac{1}{f'(a)}}$$

$$\underset{la\ fórmula}{\xrightarrow{\substack{derivando \\ otra\ vez}}} \quad (f^{-1})''(b) = \frac{-f''\big(f^{-1}(b)\big)(f^{-1})'(b)}{\Big(f'\big(f^{-1}(b)\big)\Big)^2} \xRightarrow{fórmula} (f^{-1})''(b) = \frac{-f''\big(f^{-1}(b)\big)}{\Big(f'\big(f^{-1}(b)\big)\Big)^3} = \frac{-f''(a)}{\big(f'(a)\big)^3}$$

Ejemplo-8(64): Sea f(x)=$x^2 - 2x - 3$. *Calcular* $(f^{-1})'(0)$. *Solución:* $\frac{1}{4}$ ó $-\frac{1}{4}$.

4.7 CÁLCULO DE LA DERIVADA N-ÉSIMA

Existen diferentes métodos:

1) Hacer primeras derivadas y búsqueda directa de una LEY DE RECURRENCIA.

   Ejemplo: $f(x)=\frac{1}{ax+b}$ *Solución*: $f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{a^n}{(ax+b^{\ n+1}}$

2) Cuando tenemos $\frac{p(x)}{q(x)}$ tratar de factorizar $q(x)=(x-r_1)\cdot\ldots(x-r_n)$:$\rightarrow\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{(x-r_1)}+\cdots+\frac{A_n}{(x-r_n)}$

3) Fórmula de LEIBNIZ:

$$\boxed{(f\cdot g)^{(n)}(a)=\sum_{0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(a)g^{(k)}(a)=\binom{n}{0}f^{(n)}(a)g(a)+\binom{n}{1}f^{(n-1)}(a)g'(a)+\cdots+\binom{n}{n}f(a)g^{(n)}(a)}$$

4) Si piden la derivada enésima en un punto problemático se podría utilizar también la definición:

$$f^{(n)}(a)=\underset{x\to a}{l}\ \frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

4.8 REGLA DE L'HÔPITAL (Indeterminaciones 0/0 y ∞/∞)

Caso 0/0: Sean $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ y sea $x_0\in(a,b)$ siendo $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ *y* $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$ se cumple que:

$$Si\ existe\ \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\ \xrightarrow{entonces}\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l\qquad (válido\ también\ si\ l=\pm\infty)$$

Nota: no hay obligación de que exista la derivada de f y g en x_0 *pero sí en su entorno.*

Si existieran dichas derivadas se podría decir que: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Caso ∞/∞: Sean $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ y sea $x_0\in(a,b)$ siendo $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ *y* $\lim_{x\to x_0}g(x)=\infty$ se cumple que:

$$Si\ existe\ \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\ \xrightarrow{entonces}\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l\qquad (válido\ también\ si\ l=\pm\infty)$$

Ejemplo-2 (82): Sea $f(x)=(x^3-2x+3)^{1/x}. Calcular\ el\ \lim_{x\to\infty}f(x)$. (*Solución: 1*).

NOTA: Resolución de otro tipo de indeterminaciones.

INDETERMINACIÓN	PROCESO A SEGUIR
∞^0 ó 0^0	Se toman logaritmos $\xRightarrow{se\ transforma\ en}$ $0\cdot\infty$
$0\cdot\infty$	$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)}\xRightarrow{se\ transforma\ en}tipo\ \frac{0}{0}$
$\infty-\infty$	Multiplicar y dividir por el conjugado del denominador
1^∞	$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to a}g(x)(f(x)-1)}$

4.9 TABLA DE DERIVADAS

Funciones elementales		Funciones compuestas	
Función f(x)	**Derivada f '(x)**	**Función f(u) con u = u(x)**	**Derivada f '(x) = f '(u).u'(x)**
$f(x)=\mathrm{k}$	$f'(x)=0$		
$f(x)=x$	$f'(x)=1$		
$f(x)=x^p \quad p\in\mathrm{R}$	$f'(x)=px^{p-1}$	$f(u)=u^p \quad p\in\mathrm{R}$	$f'(u)=pu^{p-1}u'$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$	$f(x)=\ln u$	$f'(x)=\dfrac{u'}{u}$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$	$f(x)=\log_a u$	$f'(x)=\dfrac{u'}{u\ln a}$
$f(x)=e^x$	$f(x)=e^x$	$f(u)=e^u$	$f'(u)=e^u u'$
$f(x)=a^x$	$f(x)=a^x\ln a$	$f(u)=a^u$	$f'(u)=a^u\ln a\, u'$
$f(x)=g(x)^{h(x)}$	$f'(x)=h(x)\,g(x)^{h(x)-1}g'(x)+g(x)^{h(x)}\ln g(x)\,h'(x)$		
$f(x)=\operatorname{sen} x$	$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\operatorname{sen} u$	$f'(x)=\cos u\, u'$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\operatorname{sen} x$	$f(x)=\cos u$	$f'(x)=-\operatorname{sen} u\, u'$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}=$ $=1+\operatorname{tg}^2 x$	$f(x)=\operatorname{tg} u$	$f'(x)=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=$ $=(1+\operatorname{tg}^2 u)\,u'$
$f(x)=\operatorname{arcsen} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\operatorname{arcsen} u$	$f'(x)=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\arccos u$	$f'(x)=\dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x)=\operatorname{arctg} u$	$f'(x)=\dfrac{u'}{1+u^2}$
$f(x)=\operatorname{sh} x$	$f'(x)=\operatorname{ch} x$	$f(x)=\operatorname{sh} u$	$f'(x)=\operatorname{ch} u\, u'$
$f(x)=\operatorname{ch} x$	$f'(x)=\operatorname{sh} x$	$f(x)=\operatorname{ch} u$	$f'(x)=\operatorname{sh} u\, u'$
$f(x)=\operatorname{th} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=$ $=1-\operatorname{th}^2 x$	$f(x)=\operatorname{th} u$	$f'(x)=\dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}=$ $=(1-\operatorname{th}^2 u)\,u'$
$f(x)=\arg\operatorname{sh} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$f(x)=\arg\operatorname{sh} u$	$f'(x)=\dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$f(x)=\arg\operatorname{ch} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$f(x)=\arg\operatorname{ch} u$	$f'(x)=\dfrac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$f(x)=\arg\operatorname{th} x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$	$f(x)=\arg\operatorname{th} u$	$f'(x)=\dfrac{u'}{1-u^2}$